

Programme de colle n°6

semaine du 2 au 6 novembre

Notions vues en cours

Chapitre 8 – Primitives et intégrales

- *Un formulaire de primitives usuelles est disponible sur le site.* On y trouve notamment les primitives de $x \mapsto u'(ax+b)$, $u'e^u$, $\frac{u'}{u}$, $u'u^\alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$), avec u une fonction dérivable sur I
- Primitive d'une fonction sur un intervalle I , la différence de deux primitives sur un intervalle est une constante
- Primitive d'une fonction sur un ensemble D , les constantes d'intégration peuvent être différentes sur chaque sous-intervalle (maximal) de D
- Intégrale d'une fonction continue sur $[a, b]$, notation $\int_a^b f(x)dx$ ou $\int_a^b f$. Extensions $\int_b^a f = -\int_a^b f$ et $\int_a^a f = 0$, interprétation de $\int_a^b f$ comme une aire signée
- **Théorème fondamental de l'analyse**, $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b$ avec F une primitive quelconque de f , toute fonction continue sur I admet des primitives, définition d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$
- Propriétés de l'intégrale : linéarité, Chasles, croissance, positivité, IPP, changement de variables (*il n'est pas nécessaire de vérifier explicitement que les fonctions soient de classe $\mathcal{C}^1$ dans une IPP, et de même pour la fonction de changement de variable*)
- Notation (officielle) $\int^x f(t)dt$ et $[F(t)]^x$ pour désigner une primitive générique de f , cette expression n'est défini qu'à constante (additive) près
- Intégrales de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, intégrale d'une fonction paire, impaire ou périodique
- Les méthodes pour intégrer les fonctions suivantes doivent être connues : $e^{ax} \cos(bx)$, $e^{ax} \sin(bx)$ et $\frac{1}{ax^2 + bx + c}$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ (vu : décomposition de $\frac{1}{(x-\alpha)(x-\beta)}$ en éléments simples)
- Règles de Bioche et changement de variable $u = \tan \frac{x}{2}$ pour intégrer les fonctions rationnelles en $\cos x$ et en $\sin x$.

Les questions de cours sont en page suivante

Questions de Cours. Pour chaque étudiant(e) :

- 8 questions Flash (question de cours sans démonstration choisie par l'examineur, sur laquelle on doit passer un temps minimal). Ces questions sont choisies parmi celle de la page suivantes (chapitres **1 à 8**). Chaque question sera notée sur 1 point et constituera la note des questions de cours. Le reste est dévolu aux exercices sur l'intégration.

Les questions flash sont en page suivante

Chapitre 8 – Primitives et intégrales

- Donner une primitive de $\frac{u'}{u}$. En déduire une primitive de $\frac{1}{x} \times \frac{1}{\ln x}$.
- Donner une primitive de $u' u^\alpha$ avec $\alpha \neq -1$. En déduire une primitive de $\operatorname{sh} x \times \frac{1}{\operatorname{ch}^n x}$.
- Donner une primitive de $u' u^\alpha$ avec $\alpha \neq -1$. En déduire une primitive de $\cos x \sqrt{\sin x}$.
- Donner une primitive de $u'(ax+b)$ avec $a \neq 0$ et $b \in \mathbb{R}$. En déduire une primitive de $\tan(2x+3)$.
- Si F est une primitive d'une fonction f sur un intervalle I , quelles sont toutes les primitives de f sur I ?
- Énoncer le théorème fondamental de l'analyse.
- Donner la définition d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.
- Soit $a \geq 0$. Que peut-on dire de $\int_{-a}^a f$ si f est impaire ? et si f est paire ?

Chapitre 7 – Fonctions usuelles

- Énoncer le théorème de la bijection monotone. On pourra en faire tout ou partie oralement...
- Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction bijective. Quelles sont les hypothèses à vérifier pour affirmer que f^{-1} est dérivable en y ? Que vaut alors $(f^{-1})'(y)$?
- Soit $x, y \in \mathbb{R}$. Exprimer x^y avec des fonctions usuelles. Pour quelles valeurs de x et de y est-ce que cela a un sens ?
- Énoncer les croissances comparées en $+\infty$
- Quels sont les ensembles de départ et d'arrivée de $\arcsin$? et de $\arccos$?
- Pour quelles valeurs de x a-t-on $\arcsin(\sin x) = x$? Et $\sin(\arcsin x) = x$?
- Pour quelles valeurs de x a-t-on $\arccos(\cos x) = x$? Et $\cos(\arccos x) = x$?
- Donner les dérivées de $\arccos x$ et de $\arctan x$.
- Quels sont les ensembles de départ et d'arrivée de $\arctan$? et de th ?
- Donner deux expressions de la dérivée de $\operatorname{th} x$.

Chapitre 6 – Rappels et compléments sur les fonctions réelles

- Soit f et g deux fonctions de D dans $\mathbb{R}$. Que signifie $f \leq g$?
- Soit f et g deux fonctions dont on note D_f et D_g les ensembles de définitions. Que doit vérifier un réel x pour que $(g \circ f)(x)$ ait un sens ?
- Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Donner la définition de “ f est croissante”. Oralement : et pour “ f est strictement croissante” ?
- Si f est croissante et g est décroissante, quelle est la monotonie de $g \circ f$? Et si f et g sont toutes deux décroissantes ?
- Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Donner la définition de “ f est majorée”
- Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Donner une caractérisation en termes de quantificateurs de “ f est bornée”
- Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Donner la définition de “ f admet un minimum en a ”
- Donner la définition de “ f est continue en a ”
- Donner la définition de “ f est dérivable en a ”
- Donner deux formules de dérivation (au choix de l'examinateur)

Chapitre 5 – Nombres complexes

- Soit z et z' deux complexes et λ un réel. Parmi les formules suivantes, compléter celles qui sont vraies (et seulement celles-là) :

$$\operatorname{Re}(z+z') = \dots \quad \operatorname{Im}(zz') = \dots \quad \operatorname{Re}(\lambda z) = \dots \quad \operatorname{Im}(\bar{z}) = \dots$$

- Compléter les formules suivantes : $z + \bar{z} = \dots$ et $z - \bar{z} = \dots$
- Soit $u, v \in \mathbb{C}$. Compléter l'identité remarquable suivante : $|u+v|^2 = \dots$
- Soit $u, v \in \mathbb{C}$. À quelle condition sur u et v a-t-on $|u+v| = |u| + |v|$?
- Donner les deux formules d'Euler.
- À quelle condition est-ce qu'un complexe z admet une forme trigonométrique ? Donner cette forme en précisant dans quels ensembles appartiennent chaque nouvelle variable.
- Mettre sous forme trigonométrique un complexe de la forme a et/ou de la forme ib avec a et b deux réels choisis par l'examineur.
- Si $re^{i\theta} = r'e^{i\theta'}$ (avec $r, r' \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$), que peut-on en déduire sur r, r', θ, θ' ?
- Combien de racines carrées possède un nombre complexe ω ? Si z est une de ces racines, que peut-on dire des autres ?
- On considère le polynôme $az^2 + bz + c$ avec $a, b, c \in \mathbb{C}$. Que vaut la somme de ses racines ? et le produit ?
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Quelles sont les racines n -ièmes de l'unité ?
- Soit $z \in \mathbb{C}$. Écrire e^z sous forme trigonométrique.
- Soit $z \in \mathbb{C}^*$. À quelle condition sur $\arg(z)$ a-t-on $z \in \mathbb{R}_+^*$? et $z \in \mathbb{R}^*$?

Chapitre 4 – Trigonométrie

- Pour cosinus, sinus ou tangente : une ou deux formules à compléter parmi les formules de changement de quadran, d'addition, de duplication, au choix de l'examineur.
- Compléter : $\cos a = \cos b \iff \dots$
- Compléter : $\sin a = \sin b \iff \dots$
- Compléter : $\tan a = \tan b \iff \dots$
- Quel est l'ensemble de définition de la fonction tangente ?

Chapitre 3 – Somme et produits

- Compléter les formules $\sum_{k=1}^n k = \dots$ et $\sum_{k=1}^n k^2 = \dots$
- Compléter la formule $a^n - b^n = \dots$
- Factoriser $a^n - b^n$ pour une petite valeur de n , fixée par l'examineur.
- Compléter la formule $\sum_{k=0}^n x^k = \dots$
- Recopier et compléter les formules correctes, et seulement celles-là :

$$\sum (a_i + b_i) = \dots \quad \sum a_i b_i = \dots \quad \sum \lambda a_i = \dots \quad \sum a_i^\lambda = \dots$$

$$\prod (a_i + b_i) = \dots \quad \prod a_i b_i = \dots \quad \prod \lambda a_i = \dots \quad \prod a_i^\lambda = \dots$$

(on s'autorise ici à ne rien mettre au-dessus et en-dessous des symboles $\sum$ et $\prod$)

- Réaliser un changement d'indice donné dans une somme donnée par l'examineur. Par exemple :

$$\sum_{k=1}^{n+2} \frac{k}{n+k} = \sum_{j=\dots}^{\dots} \dots \quad \text{avec } j = k + n$$

- Donner la définition de $\binom{n}{k}$, avec $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$.
- Énoncer la propriété du triangle de Pascal.
- Compléter la formule $(a+b)^n = \dots$
- Développer $(a+b)^n$ pour une petite valeur de n , fixée par l'examineur.
- Compléter : $\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} = \sum_{i=\dots}^{\dots} \sum_{j=\dots}^{\dots} a_{ij} = \sum_{j=\dots}^{\dots} \sum_{i=\dots}^{\dots} a_{ij}$
- Compléter : $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{ij} = \sum_{i=\dots}^{\dots} \sum_{j=\dots}^{\dots} a_{ij} = \sum_{j=\dots}^{\dots} \sum_{i=\dots}^{\dots} a_{ij}$

Chapitre 2 – Calcul algébrique dans $\mathbb{R}$

- Compléter : $\forall a \in \dots \quad \sqrt{a^2} = \dots \quad \text{et} \quad \forall a \in \dots \quad \sqrt{a^2} = \dots$
- Sous quelle condition sur les réels a et b peut-on écrire " $a = b \iff a^2 = b^2$ " ?
- À quelle condition peut-on appliquer une fonction f des deux côtés d'une inégalité $a \leq b$ et quelle inégalité obtient-on ?
- Dessiner le graphe de la fonction partie entière.
- Soit x et y deux réels et k un entier. Parmi les formules suivantes, compléter celles qui sont vraies (et seulement celles-là) :

$$\lfloor x+y \rfloor = \dots \quad \lfloor x+k \rfloor = \dots \quad \lfloor 2x \rfloor = \dots$$

- Énoncer la première inégalité triangulaire.
- Énoncer la seconde inégalité triangulaire.
- Étant donné deux réels quelconques, comment définit-on la distance qui les sépare ?

Chapitre 1 – Logique et rédaction

- Soit P et Q deux assertions. Donner la négation de " $P \implies Q$ ".
- Soit P et Q deux assertions. Donner la négation de " P ou Q ".
- Soit $n \in \mathbb{Z}$. Donner une caractérisation de " n est impair" en termes de quantificateurs.
- Donner la négation d'une assertion choisie par l'examineur, par exemple " $\forall y \in \mathbb{R} \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad y = 0$ ou $n \leq y$ ".
- Qu'appelle-t-on la contraposée de l'assertion " $P \implies Q$ " ? Quel est son lien logique avec l'assertion " $P \implies Q$ " ?
- On souhaite montrer une assertion H_n pour tout $n \in \mathbb{N}$ par récurrence double. Décrire ce qu'il faut démontrer pour l'initialisation et pour l'hérédité.
- On souhaite montrer une assertion H_n pour tout $n \in \mathbb{N}$ par récurrence forte. Décrire ce qu'il faut démontrer pour l'initialisation et pour l'hérédité.
- Quel raisonnement utiliseriez-vous pour démontrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel ?